

Itaú Unibanco

Itaú

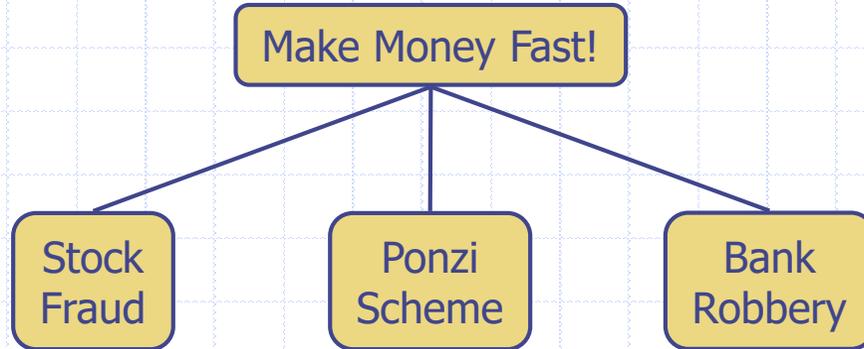
Programa de formação

ITAÚ analytics.

Módulo I – Fundamentos Computacionais
Sessão 8 - Aula 2 – Árvores (2)
Prof. Dr. Luiz Alberto Vieira Dias
Prof. Dr. Lineu Mialaret



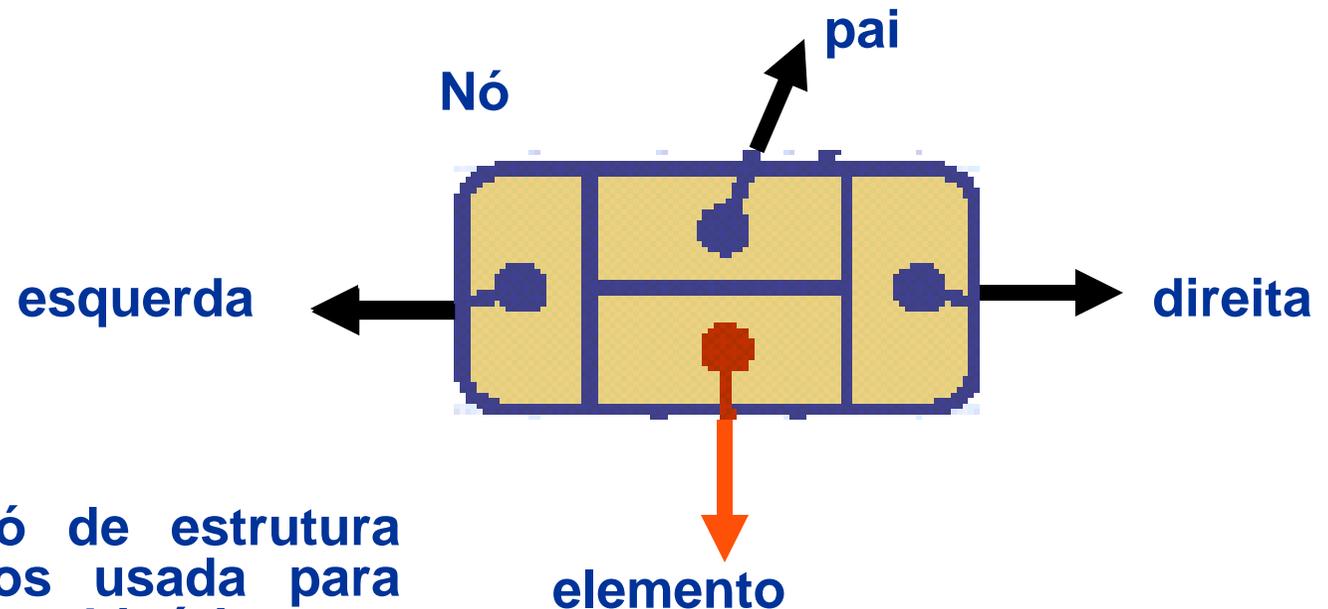
Trees



Árvores

Estrutura Encadeada para a Representação de Árvores Binárias

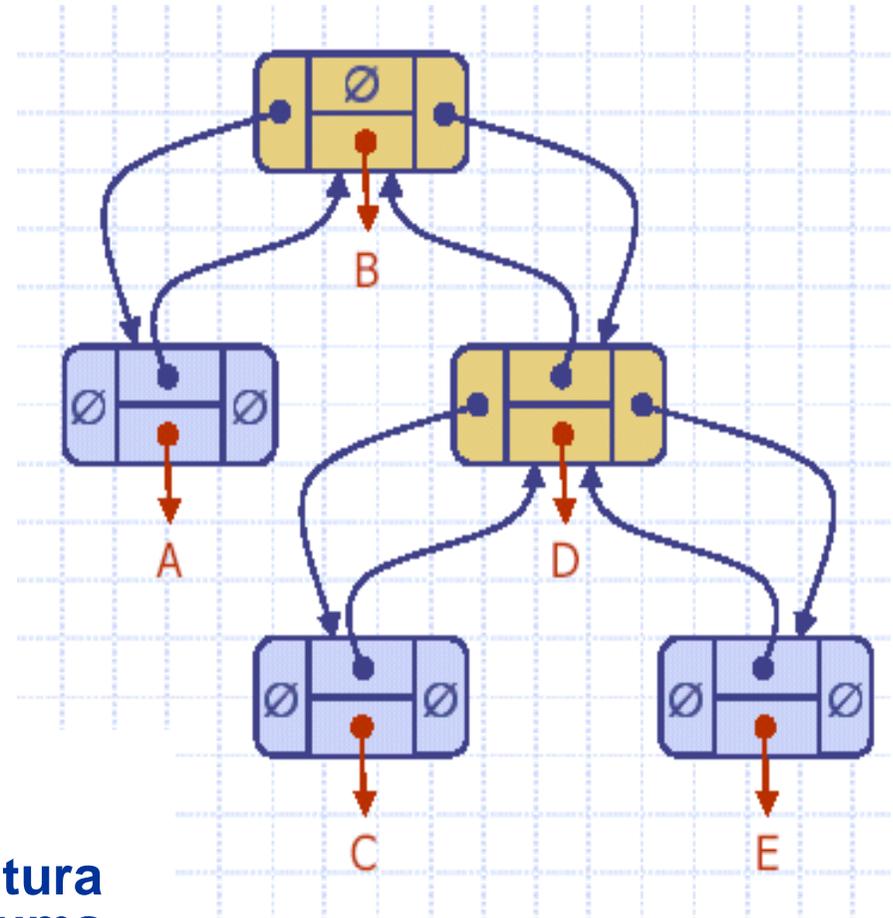
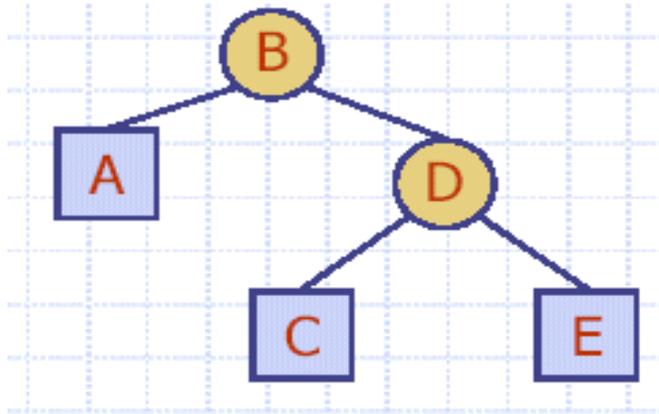
- Uma forma natural de implementar uma árvore binária T é usar uma estrutura encadeada, onde representa-se cada nó p da árvore T por meio de um objeto que referencia o elemento armazenado em p , bem como objetos posição associados com os pais e filhos do nó p



Exemplo de um nó de estrutura encadeada de dados usada para representar uma árvore binária

Árvores

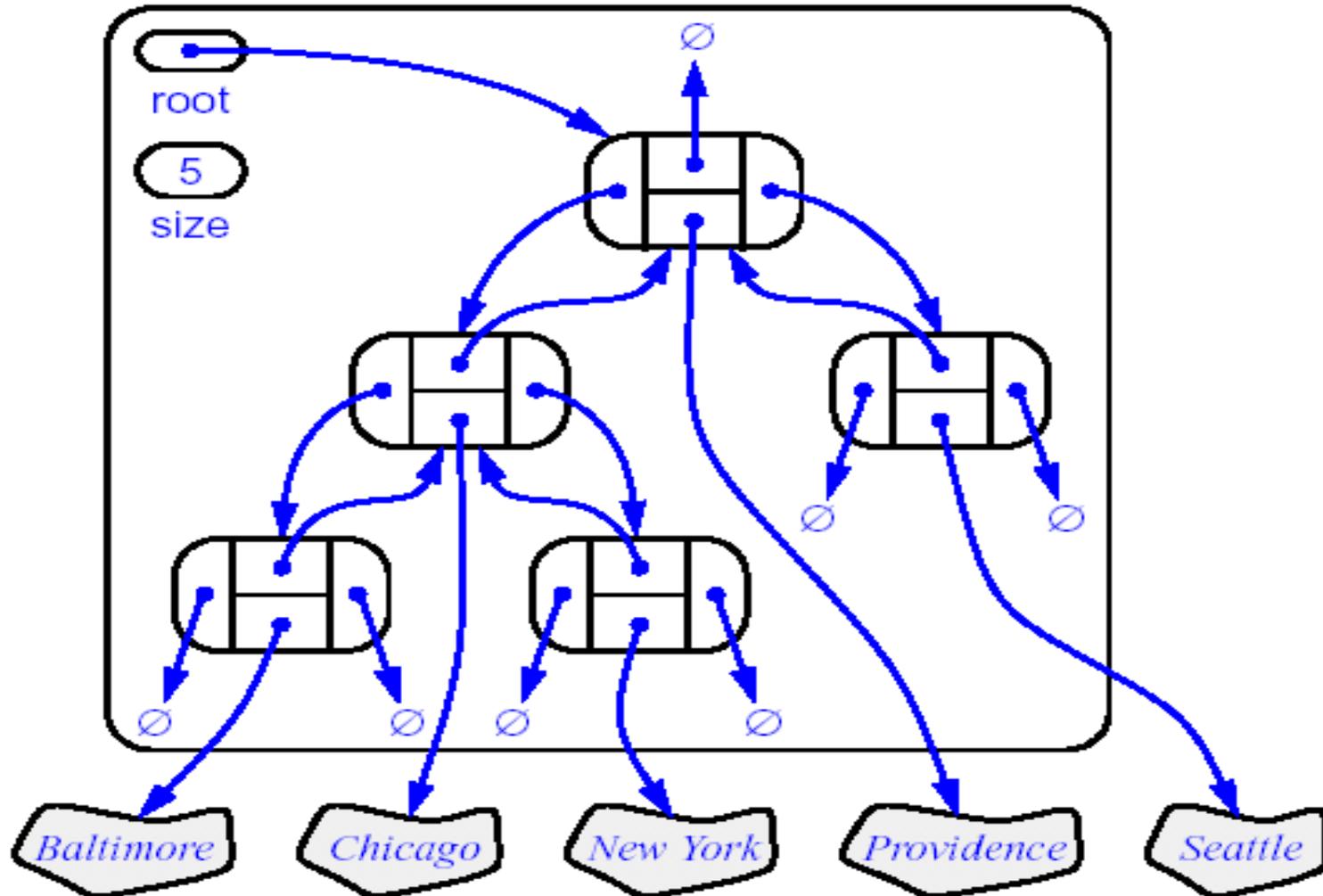
Estrutura Encadeada para a Representação de Árvores Binárias (cont.)



Exemplo do uso de uma estrutura encadeada para a representação de uma árvore binária

Árvores

Estrutura Encadeada para a Representação de Árvores Binárias (cont.)



Outro exemplo do uso de uma estrutura encadeada para a representação de uma árvore binária

Árvores

Estrutura Encadeada para a Representação de Árvores Binárias (cont.)

- Para uma árvore binária encadeada T , há os seguintes métodos de atualização adicionais

$T.add_root(e)$: Create a root for an empty tree, storing e as the element, and return the position of that root; an error occurs if the tree is not empty.

$T.add_left(p, e)$: Create a new node storing element e , link the node as the left child of position p , and return the resulting position; an error occurs if p already has a left child.

$T.add_right(p, e)$: Create a new node storing element e , link the node as the right child of position p , and return the resulting position; an error occurs if p already has a right child.

$T.replace(p, e)$: Replace the element stored at position p with element e , and return the previously stored element.

$T.delete(p)$: Remove the node at position p , replacing it with its child, if any, and return the element that had been stored at p ; an error occurs if p has two children.

$T.attach(p, T1, T2)$: Attach the internal structure of trees $T1$ and $T2$, respectively, as the left and right subtrees of leaf position p of T , and reset $T1$ and $T2$ to empty trees; an error condition occurs if p is not a leaf.

Árvores

Estrutura Encadeada para a Representação de Árvores Binárias (cont.)

- Sumarização da performance da implementação de uma árvore binária por meio de estrutura encadeada

Operation	Running Time
len, is_empty	$O(1)$
root, parent, left, right, sibling, children, num_children	$O(1)$
is_root, is_leaf	$O(1)$
depth(p)	$O(d_p + 1)$
height	$O(n)$
add_root, add_left, add_right, replace, delete, attach	$O(1)$

Running times for the methods of an n -node binary tree implemented with a linked structure. The space usage is $O(n)$.

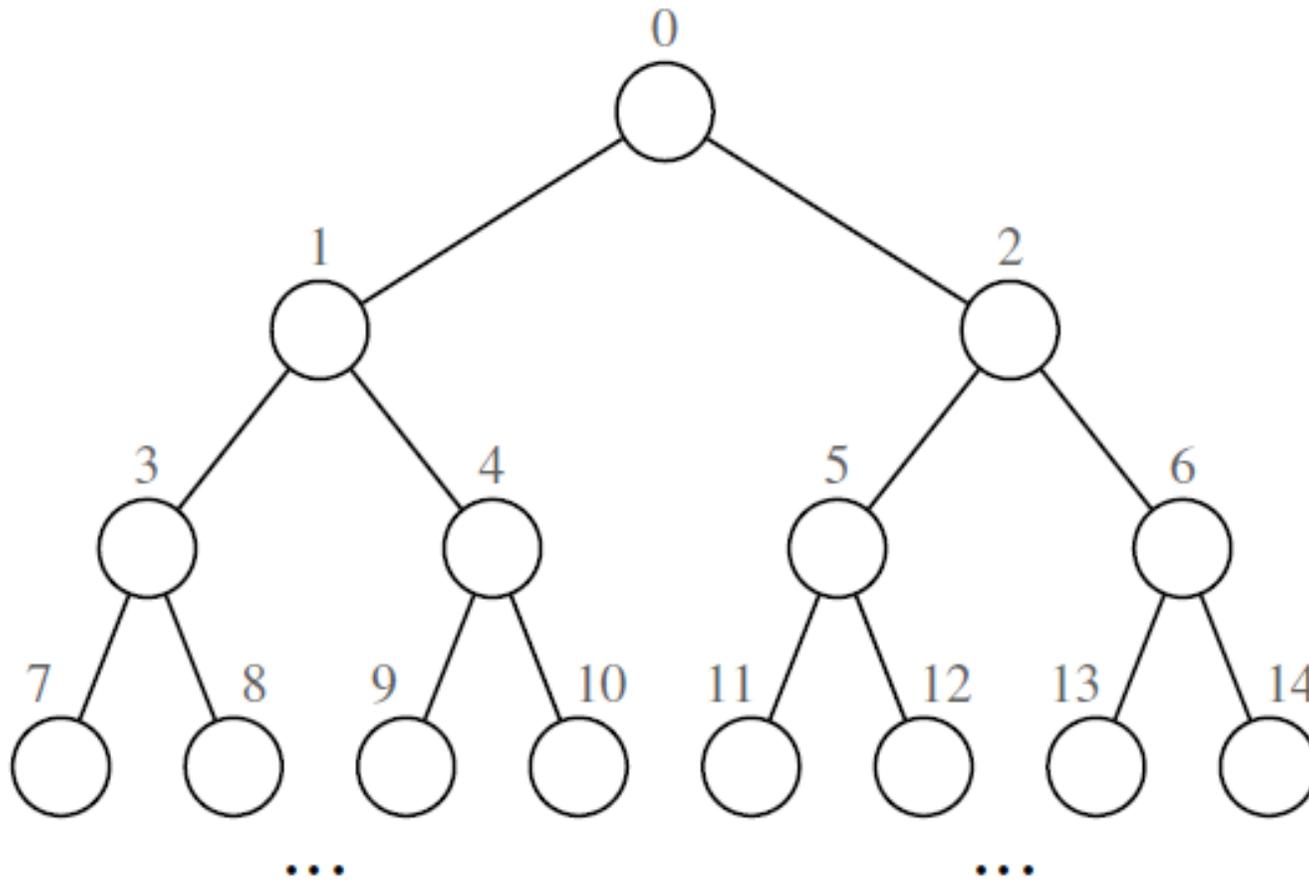
Árvores

Estrutura em Array para Representação de Árvores Binárias

- Uma estrutura simples para representação de uma árvore binária T é baseada numa numeração dos nós de T
- Para cada nó p da árvore T , faça-se $f(p)$ ser um inteiro definido da seguinte forma:
 - ◆ Se p é a raiz de T , então $f(p) = 0$ (ou 1)
 - ◆ se p é o filho da esquerda do nó q , então $f(p) = 2f(q) + 1$
 - ◆ se p é o filho da direita do nó q , então $f(p) = 2f(q) + 2$
- Essa função de numeração, conhecida como numeradora por nível dos nós de uma árvore binária T , numera os nós de T , de forma crescente, da esquerda para a direita
- Observar que a numeração por é baseada na posição potencial do nó e não na posição na árvore

Árvores

Estrutura em Array para Representação de Árvores Binárias (cont.)

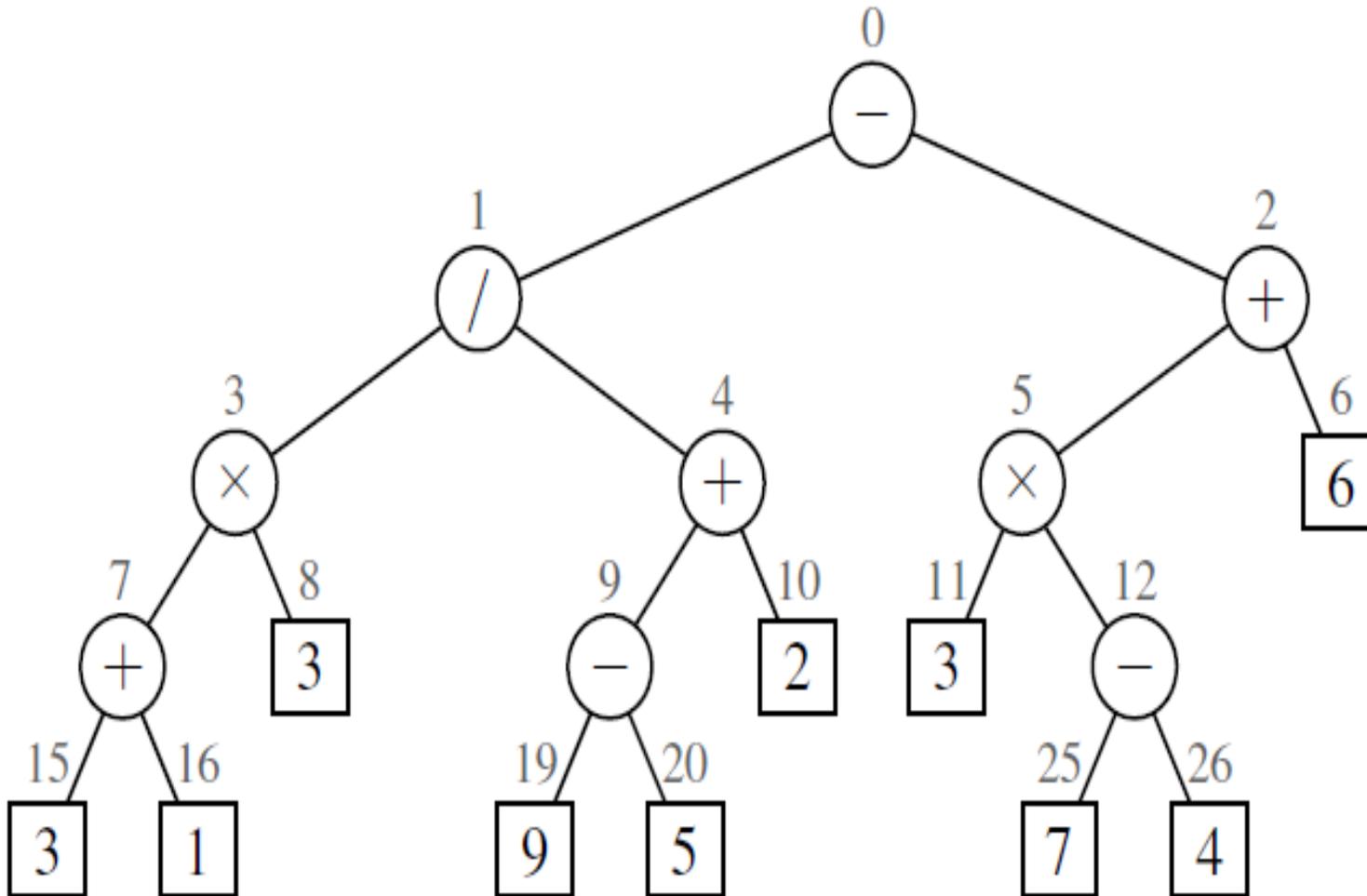


$$\begin{aligned}f(\text{raiz}) &= 0 \\f(1) &= 2f(0) + 1 = 1 \\f(2) &= 2f(0) + 2 = 2 \\&\dots\end{aligned}$$

Exemplo de numeração de níveis de uma árvore binária

Árvores

Estrutura em Array para Representação de Árvores Binárias (cont.)

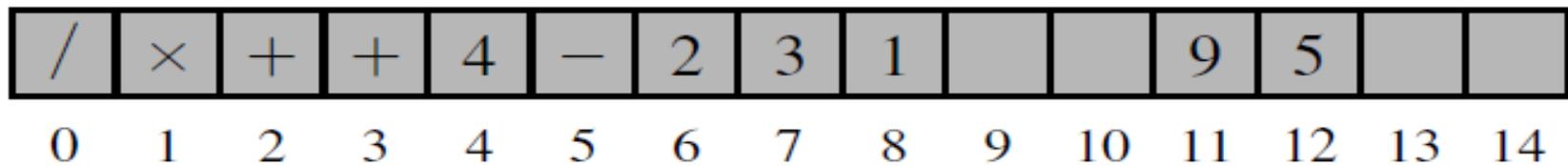
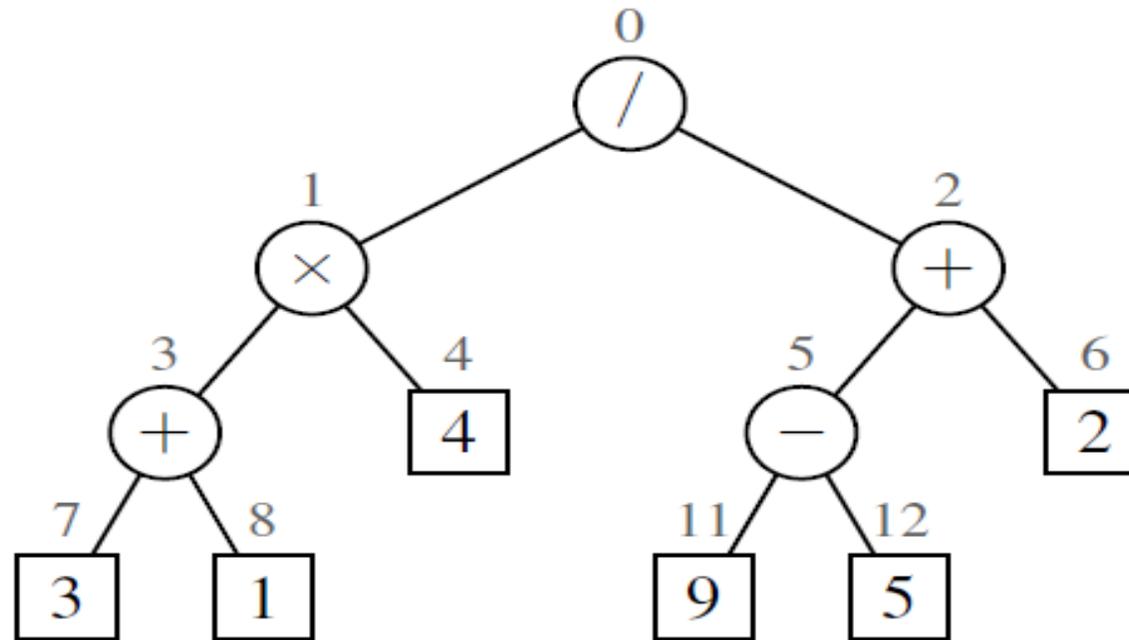


Não há nós com níveis de numeração 13 ou 14 porque o nó com nível 6 não tem filhos

Outro exemplo de numeração de níveis de uma árvore binária

Árvores

Estrutura em Array para Representação de Árvores Binárias (cont.)



Representation of a binary tree by means of an array.

Árvores

Estrutura em Array para Representação de Árvores Binárias (cont.)

- Vantagem da função numeradora por nível implementada em *array*
 - ◆ Métodos como por exemplo *root* e *parent* podem ser implementados por operações aritméticas no nó $f(p)$
- Desvantagens da função numeradora por nível implementada em *array*
 - ◆ Consumo de espaço, no pior caso sendo $O(2^n - 1)$
 - ◆ Algumas operações de atualização podem levar um tempo $O(n)$, como por exemplo a remoção de um nó e a elevação de seus filhos

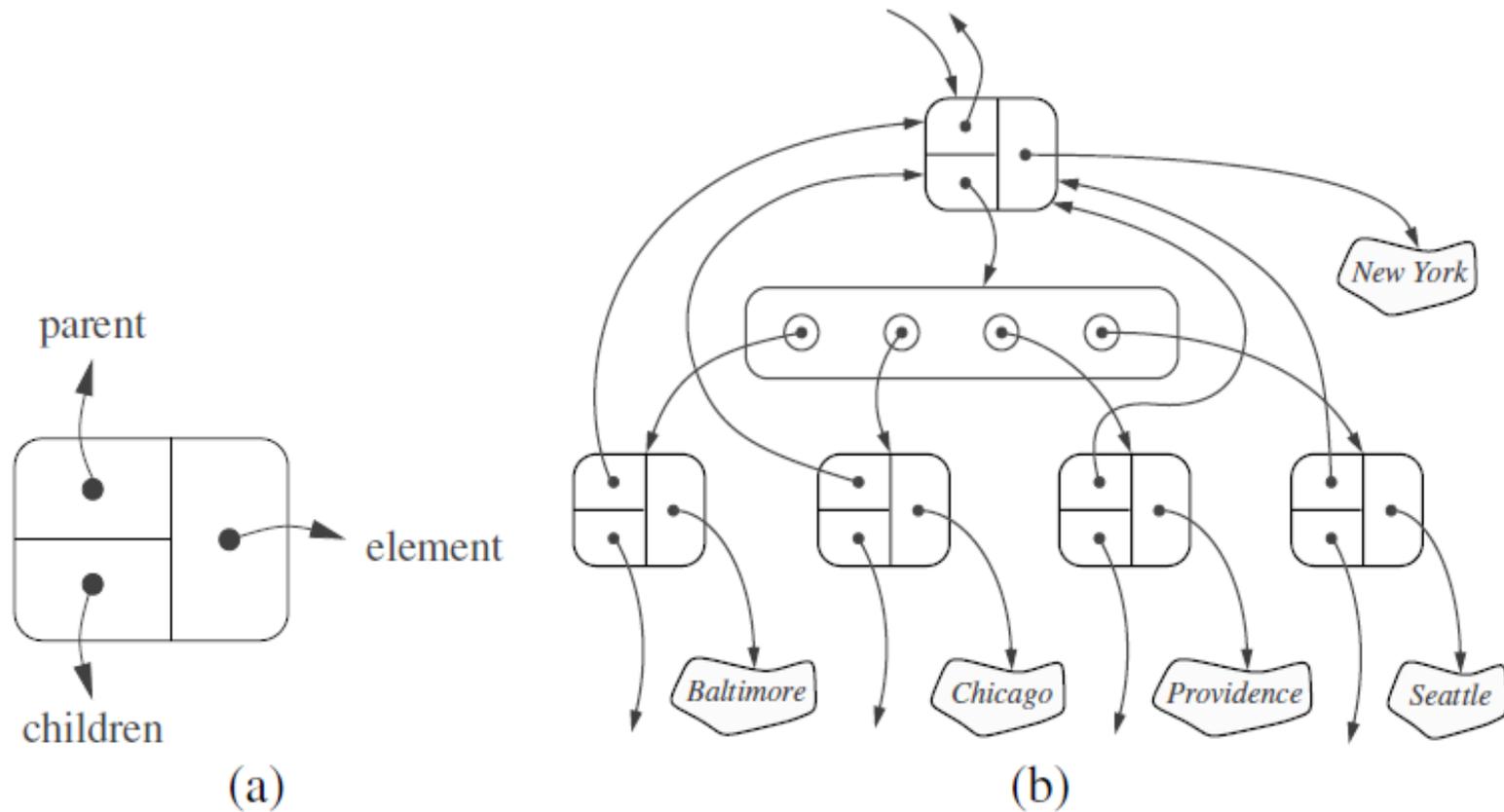
Árvores Binárias

Uma Estrutura Encadeada para Árvores Genéricas

- Pode-se estender a estrutura encadeada de árvores binárias para a representação de árvores genéricas
- Uma vez que não existe limite para o número de filhos de um nó v numa árvore genérica, usa-se um contêiner (por exemplo uma lista ou um *array*) para propiciar o armazenamento dos filhos do nó v
- A seguir, são apresentados exemplos dessa forma esquemática de armazenamento

Árvores Binárias

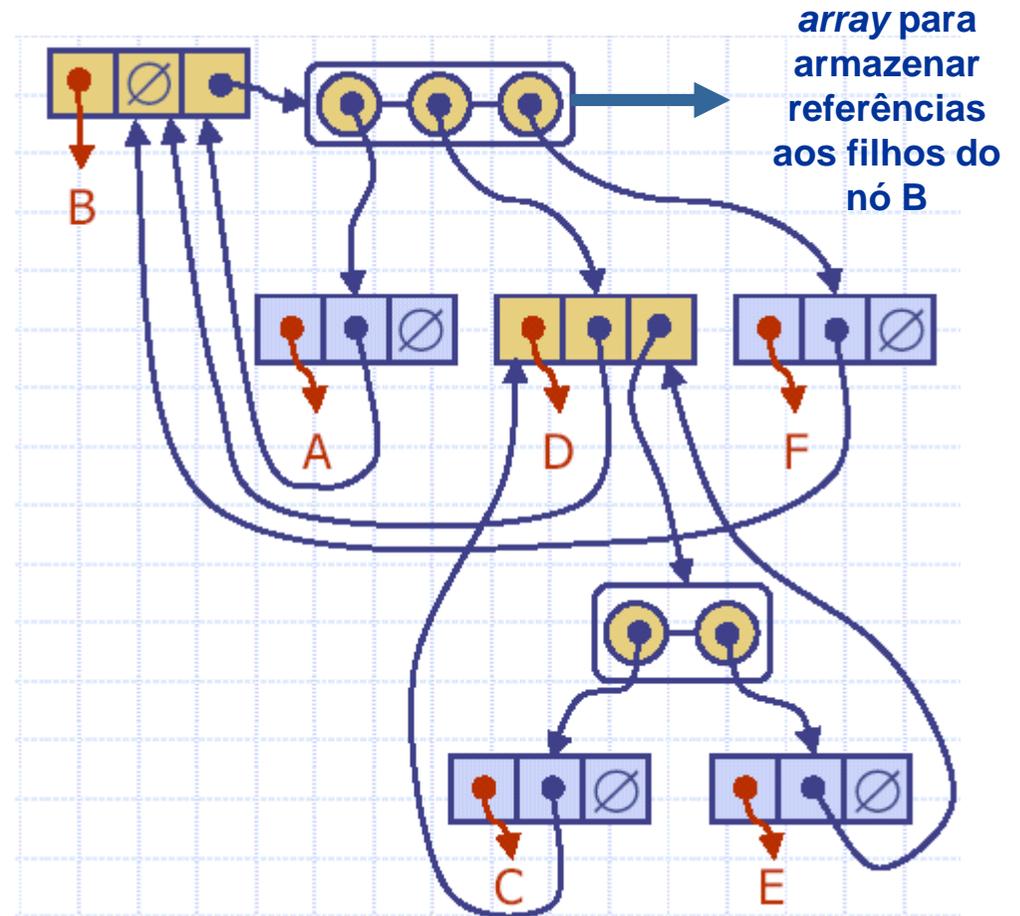
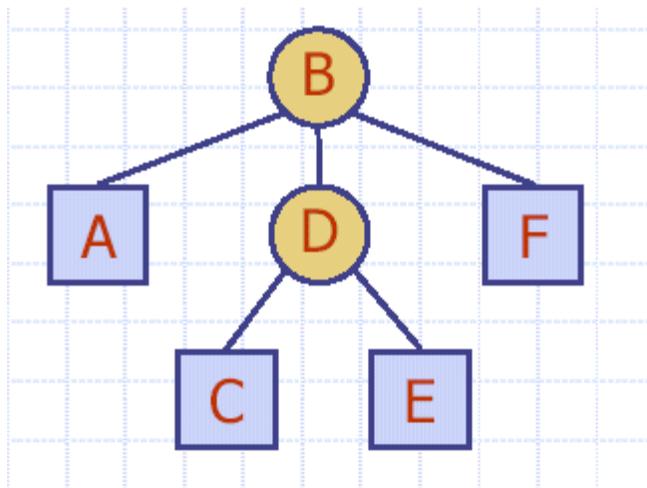
Uma Estrutura Encadeada para Árvores Genéricas (cont.)



The linked structure for a general tree: (a) the structure of a node; (b) a larger portion of the data structure associated with a node and its children.

Árvores Binárias

Uma Estrutura Encadeada para Árvores Genéricas (cont.)



Representação de uma estrutura encadeada para uma árvore genérica.

Árvores

Estrutura Encadeada para Árvores Genéricas (cont.)

- Sumarização da performance da implementação de uma árvore geral por meio de estrutura encadeada

Operation	Running Time
len, is_empty	$O(1)$
root, parent, is_root, is_leaf	$O(1)$
children(p)	$O(c_p + 1)$
depth(p)	$O(d_p + 1)$
height	$O(n)$

Running times of the accessor methods of an n -node general tree implemented with a linked structure. We let c_p denote the number of children of a position p . The space usage is $O(n)$.

Árvores Binárias

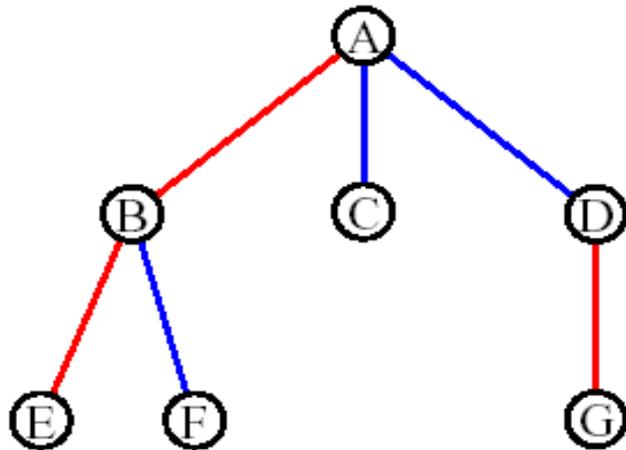
Representando Árvores Genéricas por meio de Árvores Binárias

- Uma representação alternativa para uma árvore genérica T pode ser obtida por meio da transformação da árvore T numa árvore binária T' . Supõe-se que a árvore T seja uma árvore ordenada
- A transformação segue os seguintes passos:
 - ◆ para cada nó u da árvore T existe um nó interno u' da árvore T' associado com o nó u
 - ◆ Se o nó u é um nó externo da árvore T e não existe um irmão que o siga imediatamente, então os filhos do nó u' da árvore T' são nós externos
 - ◆ Se o nó u é um nó interno da árvore T e v é o primeiro filho do nó u da árvore T , então o nó v' é o filho da esquerda do nó u' da árvore T'
 - ◆ Se o nó v tem um irmão que o segue imediatamente, então w' é o filho da direita do nó v' na árvore T'

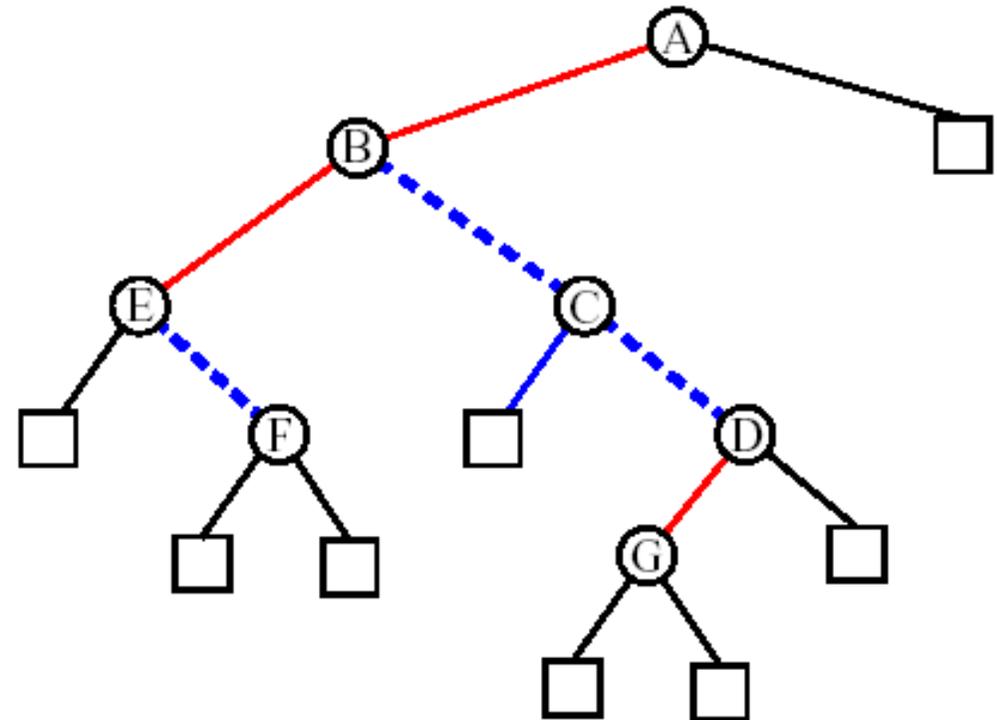
Árvores Binárias

Representando Árvores Genéricas por meio de Árvores Binárias (cont.)

- tree T



- binary tree T' representing T



Exemplo da representação de uma árvore genérica por meio de uma árvore binária, onde é apresentada a árvore T , e a árvore binária T' associada com a árvore T . As linhas pontilhadas conectam os nós de T' associados com os nós irmãos da árvore T .